14/4/2020

Εισαγωγή στην Τοπολογία

6ο online μάθημα

Ορισμός: Αν (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) δυο μ.χ και ρ μια μετρική στο X, $X = X_1 \times X_2$ η ρ λέγεται μετρικό γινόμενο αν ισχύει η ιδιότητα:
Για κάθε ακολουθία $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $X_1 \times X_2$ και κάθε $(x,y) \in X_1 \times X_2$
ισχύει ότι $(x_n, y_n) \xrightarrow{\rho} (x,y) \iff x_n \xrightarrow{\rho_1} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho_2} x$

Γενικότερα αν $(X_i, \rho_i)_{i=1}^{k}$ μετρικοί χώροι και ρ μια μετρική στο $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k = \prod_{i=1}^{k} X_i$, η ρ λέγεται $\boxed{\text{μετρική γινόμενο}}$ αν για κάθε ακολουθία $(x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\prod_{i=1}^{k} X_i$ και κάθε $(x^1, x^2, \dots, x^k) \in \prod_{i=1}^{k}$
ισχύει ότι $(*)\ (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k) \xrightarrow{\rho} (x^1, x^2, \dots, x^k) \iff \boxed{x_n^i \xrightarrow{\rho} x^i \quad \forall i = 1, \dots, k}$

Παράδειγμα: Αν θεωρήσουμε τον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική τότε ο $\mathbb{R}^k$ με την Ευκλείδεια μετρική είναι χώρος γινόμενο.
(αφού όπως έχουμε αποδείξει ισχύει η $(*)$ για ακολουθίες στον $\mathbb{R}^k$)

Πληρότητα

Ορισμός: Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X λέγεται βασική ακολουθία ή ακολουθία Cauchy (ως προς ρ) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m \geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ $\left[(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ ώστε } \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ με } n, m \geq n_0 \text{ να ισχύει } \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \right]$

Σημείωση: Η έννοια της βασικής ακολουθίας εξετάζει την εγγύτητα (δηλαδή το πόσο κοντά είναι μεταξύ τους) των όρων της ακολουθίας μεταξύ τους. Αντίθετα η έννοια της σύγκλισης ακολουθίας εξετάζει την εγγύτητα των όρων της ακολουθίας από ένα όριο - στόχο.

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Αν η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία τότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $x_n \xrightarrow{\rho} x$.
Έστω $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n,x)<\varepsilon/2$. Έτσι για κάθε $n,m\geq n_0$ ισχύει

$$\rho(x_n,x_m)\leq \rho(x_n,x)+\rho(x,x_m)=\rho(x_n,x)+\rho(x_m,x)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

Επομένως η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική.

Παρατήρηση: Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν είναι εν γένει σωστό.
Για παράδειγμα στον $\mathbb{Q}$ με τη συνήθη μετρική (που είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική) θεωρούμε την ακολουθία $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $x_n\to e$. άρα είναι βασική. Έτσι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{Q}$ (αφού $x_n\in\mathbb{Q}$ $\forall n\in\mathbb{N}$) αλλά δεν υπάρχει $q\in\mathbb{Q}$ ώστε $x_n\to q$.
(Πράγματι, αν υπήρχε τέτοιο $q\in\mathbb{Q}$ θα είχαμε $x_n\to q$ και $x_n\to e$ με $q\neq e$ άτοπο.)

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Κάθε βασική ακολουθία είναι φραγμένη.

Απόδειξη: Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία. Τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n,x_m)<1$ $\forall n,m\geq n_0$. Θέτουμε $c=\max\{\rho(x_1,x_{n_0}),\rho(x_2,x_{n_0}),\dots,\rho(x_{n_0},x_{n_0}),1\}$.
Τότε έχουμε $\rho(x_n,x_{n_0})\leq c$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Συνεπώς $\forall n,m\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$\rho(x_n,x_m)\leq\rho(x_n,x_{n_0})+\rho(x_{n_0},x_m)=\rho(x_n,x_{n_0})+\rho(x_m,x_{n_0})\leq c+c=2c$$

Άρα $\sup\{\rho(x_n,x_m): n,m\in\mathbb{N}\}\leq 2c<+\infty$

Συνεπώς η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

Πρόταση: Αν (X,ρ) μ.χ. και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια βασική ακολουθία η οποία έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$ τότε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ (η ακολουθία έχει το ίδιο όριο με την υπακολουθία της)

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon>0$.
Εφόσον η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική υπάρχει $n_1\in\mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon/2$ για κάθε $n,m\geq n_1$. Εφόσον $x_{k_n}\xrightarrow{\rho} x$ υπάρχει $n_2\in\mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_{k_n},x)<\varepsilon/2$ για κάθε $n\geq n_2$.
Θέτουμε $n_0=\max\{n_1,n_2\}$.
Για κάθε $n\geq n_0$ έχουμε $k_n\geq n\geq n_0\geq n_1$ άρα $\rho(x_n,x_{k_n})<\varepsilon/2$
και $n\geq n_0\geq n_2$ άρα $\rho(x_{k_n},x)<\varepsilon/2$
Άρα $\rho(x_n,x)\leq \rho(x_n,x_{k_n})+\rho(x_{k_n},x)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$
Επομένως $x_n\xrightarrow{\rho} x$.

Ορισμός: Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) λέγεται πλήρης αν κάθε βασική ακολουθία του (X,ρ) είναι συγκλίνουσα. (δηλαδή αν η ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία)
Επίσης για $F\subseteq X$ το F λέγεται πλήρης αν ο (F,ρ_F) (όπου ρ_F η σχετική μετρική) είναι πλήρης δηλαδή αν για κάθε βασική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο F υπάρχει $x\in F$ ώστε $x_n\xrightarrow{\rho} x$.

Παραδείγματα: α) Ο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική είναι πλήρης μετρικός χώρος.
Πράγματι, από τον Απειροστικό Λογισμό Ι γνωρίζουμε ότι κάθε βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$ συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό.
β) Ο $\mathbb{Q}$ με τη συνήθη μετρική δεν είναι πλήρης. Η $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{Q}$ αλλά δεν υπάρχει $q\in\mathbb{Q}$ ώστε $x_n\to q$
γ) Ο $\mathbb{R}^k$ με την ευκλείδεια μετρική είναι πλήρης μετρικός χώρος
Έστω $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$ $\vec{x}_n=(x_n^1,x_n^2,\ldots,x_n^k)$
Ισχυρισμός: Για κάθε $i=1,\ldots,k$ η $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$.
Απόδειξη: Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$|x_n^i - x_m^i| \leq \left(\sum_{j=1}^{k}|x_n^j-x_m^j|^2\right)^{1/2} = \rho_2(\vec{x}_n,\vec{x}_m) \quad (1)$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η $(\vec{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho_i(\vec{x_n}, \vec{x_m}) < \varepsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$ και άρα από την (1) έχουμε $|x_n^i - x_m^i| < \varepsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Έτσι η $(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$ συνεπώς είναι συγκλίνουσα.

Θέτουμε $x^i = \lim_n x_n^i$ για κάθε $i = 1, \dots, k$ και $\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k$

Εφόσον, όπως έχουμε δείξει, η σύγκλιση στο $\mathbb{R}^k$ είναι κατά συντεταγμένη $\vec{x_n} \xrightarrow{\rho_2} \vec{x}$. Επομένως προκύπτει ότι $\rho_2(\vec{x_n}, \vec{x}) \longrightarrow 0$ δηλαδή ότι ο $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$ είναι πλήρης.

δ) Με τα ίδια ακριβώς βήματα μπορούμε να δείξουμε ότι αν $(X_i, d_i)_{i=1}^k$ είναι πλήρεις μετρικοί χώροι τότε ο $X = \prod_{i=1}^k X_i$ με τη μετρική d

που ορίζεται από τον τύπο

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^k d_i(x_i, y_i)^2 \right)^{1/2}$$

για κάθε $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_k) \in X$ είναι πλήρης.

ε) Αν $X \neq \emptyset$ και ρ η διακριτή μετρική στο X τότε ο (X, ρ) είναι πλήρης. Πράγματι, αν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον (X, ρ) τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $\rho(x_n, x_m) < 1$ για κάθε $n, m \geq n_0$.

και άρα $x_n = x_m$ για κάθε $n, m \geq n_0$.

Συνεπώς $x_n = x_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$

Συνεπώς η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή άρα συγκλίνουσα.

στ) Γνωρίζουμε ότι ο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική ρ είναι ομοιομορφικός με το $(-1, 1)$. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (-1, 1)$ $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ είναι ομοιομορφισμός (1-1, επί, f, f^{-1} συνεχής)

Αυτό έχει ως συνέπεια η $d(x, y) = |f(x) - f(y)| = \left| \dfrac{x}{1+|x|} - \dfrac{y}{1+|y|} \right|$

να είναι μετρική στο $\mathbb{R}$ ισοδύναμη της ρ.

Ο $(\mathbb{R}, d)$ δεν είναι πλήρης. Πράγματι αν θεωρήσουμε την ακολουθία $x_n = n$ θα δείξουμε ότι είναι βασική αλλά όχι συγκλίνουσα.

(5)

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχη $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύη $\left|\frac{n}{1+n} - 1\right| < \varepsilon/2$. Έτσι για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει

$$d(x_n, x_m) = \left|\frac{n}{1+n} - \frac{m}{1+m}\right| \leq \left|\frac{n}{1+n} - 1\right| + \left|1 - \frac{m}{1+m}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Σημείωση: Το παράδειγμα δείχνει ότι η πληρότητα δεν είναι τοπολογική ιδιότητα.

Ορισμός. Ένας **χώρος με νόρμα** $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται **χώρος Banach** αν είναι **πλήρης** ως προς την μετρική που ορίζει η νόρμα, δηλαδή αν κάθε βασική ακολουθία είναι συγκλίνουσα. Οι χώροι Banach είναι το βασικό αντικείμενο του κλάδου που ονομάζεται ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ.

Πρόταση: Έστω (X, ρ) μ.χ. και $F \subseteq X$. Αν το F είναι **πλήρες** (δηλαδή αν ο (F, ρ_F) είναι πλήρης όπου ρ_F είναι η σχετική μετρική) τότε το F είναι **κλειστό**.

Απόδειξη: Για ν.δ.ο το F είναι κλειστό αρκεί ν.δ.ο αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο F και $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε $x \in F$.
Εφόσον η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα είναι βασική ακολουθία και εφόσον F είναι πλήρες υπάρχει $y \in F$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} y$.
Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $x_n \xrightarrow{\rho} y$ έχουμε $x = y$ άρα $x \in F$.

Πρόταση: Αν (X, ρ) είναι **πλήρης** μ.χ. και F είναι **κλειστό υποσύνολο** του X τότε το F είναι **πλήρες**.

Απόδειξη: Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία του X.
Τότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία του X και εφόσον ο (X, ρ) είναι πλήρης υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Εφόσον το F είναι κλειστό υποσύνολο του X και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο F συμπεραίνουμε ότι $x \in F$.
Επομένως ο F είναι πλήρης.

Παρατήρηση: Έστω (X, ρ) τυχαίος μ.χ. και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών υποσυνόλων του X με $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$.
Τότε το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ περιέχει το πολύ ένα στοιχείο δηλαδή είτε είναι το κενό είτε είναι μονοσύνολο.
Πράγματι αν δεν συμβαίνει αυτό θα υπάρχουν $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ με $x \neq y$ άρα

$\rho(x,y)>0$.

Άρα για κάθε $n\in\mathbb{N}$ $x,y\in A_n$ άρα $diam(A_n)\geq\rho(x,y)$

Αυτό είναι άτοπο, διότι εφόσον $diam(A_n)\to 0$

$\exists n_0\in\mathbb{N}$ $diam(A_n)$ $\rho(x,y)$.

Θεώρημα (Χαρακτηρισμός του Cantor για τους πλήρεις μετρικούς χώρους): Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο (X,ρ) είναι πλήρης

(ii) Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X με $diam(F_n)\to 0$ ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\emptyset$

Απόδειξη: (i) => (ii) Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X με $F_1\supseteq F_2\supseteq F_3\supseteq\ldots\supseteq F_n\supseteq F_{n+1}\supseteq\ldots$ και $diam(F_n)\to 0$

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ επιλέγουμε $x_n\in F_n$.

Δείχνουμε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική.

Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον $diam(F_n)\to 0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $diam(F_n)<\varepsilon$ για κάθε $n\geq n_0$.

Έτσι για κάθε $n,m\geq n_0$ έχουμε $x_n\in F_n\subseteq F_{n_0}$, $x_m\in F_m\subseteq F_{n_0}$

άρα $\rho(x_n,x_m)\leq diam(F_{n_0})<\varepsilon$.

Εφόσον ο (X,ρ) είναι πλήρης υπάρχει $x\in X$ ώστε $x_n\xrightarrow{\rho}x_0$.

Θα δείξουμε ότι $x\in F_m$ για κάθε $m\in\mathbb{N}$

Έστω $m\in\mathbb{N}$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει $x_{n+m}\in F_{n+m}\subseteq F_m$.

Εφόσον η ακολουθία $(x_{n+m})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα ισχύει $x_{n+m}\xrightarrow{\rho}x$. Άρα $x\in\overline{F_m}=F_m$ διότι το F_m είναι κλειστό

Συνεπώς $x\in\bigcap_{m=1}^{\infty}F_m$.

(ii) => (i) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στον (X,ρ). θ.δ.ο. είναι συγκλίνουσα. Θέτουμε $F_n=\{x_k : k\geq n\}$ για $n=1,2,\ldots$

Παρατηρούμε ότι τα F_n είναι κλειστά σύνολα.

και η $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα.

Δειχνουμε ότι $diam(F_n) \to 0$

Έστω $\varepsilon>0$.

Εφόσον η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$

ώστε $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ για κάθε $n, m \geq n_0$

Άρα για το σύνολο $\{x_k : k \geq n_0\}$ ισχύει

$$diam(\{x_k : k\geq n_0\}) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Συνεπώς $diam(F_{n_0}) = diam(\overline{\{x_k : k\geq n_0\}}) = diam(\{x_k : k\geq n_0\}) < \varepsilon$

Εφόσον η $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα έχουμε ότι για κάθε $n\geq n_0$

ισχύει $diam(F_n) \leq diam(F_{n_0}) < \varepsilon$

Από την υπόθεση έπεται ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ και άρα υπάρχει $x\in X$ ώστε

$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε $x_n, x \in F$ άρα $0 \leq \rho(x_n, x) \leq diam(F_n)$

και εφόσον $diam(F_n)\to 0$ συμπεραίνουμε ότι $\rho(x_n, x)\to 0$ δηλαδή

$x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Σημείωση: a) Αν η ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία μη κενών συνόλων με $diam(F_n)\to 0$ το $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι είτε κενό είτε μονοσύνολο. Και οι δύο περιπτώσεις υλοποιούνται

π.χ. στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική

για τα σύνολα $A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ έχουμε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$

ενώ για το σύνολο $B_n = \left[0, \frac{1}{n}\right)$ έχουμε $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{0\}$

b) Ο $\mathbb{Q}$ με τη σχετική από τη συνήθη μετρική δεν είναι πλήρης

(διότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$)

Ας βρούμε μια φθίνουσα ακολουθία (F_n) μη κενών κλειστών υποσυνόλων

του $\mathbb{Q}$ με $diam(F_n)\to 0$ ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$

(Από το Θεώρημα του Cantor γνωρίζουμε ότι υπάρχει τέτοια ακολουθία
Εδώ ζητείται να ορίσουμε μια τέτοια)

Θέτουμε $F_n = [\sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{n}] \cap \mathbb{Q}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Τα F_n είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{Q}$, $F_n \neq \emptyset$.

$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$

ενώ $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$

Πρόταση: Αν (X,ρ), (Y,d) είναι δύο μετρικοί χώροι και $f: X \to Y$ μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Τότε για κάθε βασική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον Y.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$

Εφόσον η f είναι ομοιόμορφα συνεχής υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in X$ αν $\rho(x,y) < \delta$ τότε $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Εφόσον η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n, x_m) < \delta$ και άρα $d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ για $n, m \geq n_0$

Επομένως η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική

Σημείωση: Το αντίστροφο στην προηγούμενη πρόταση δεν ισχύει.